

DOI: [10.7242/1999-6691/2017.10.4.39](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.4.39)

УДК 532.517.4

ПРЯМОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СПИРАЛЬНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПАКЕТЕ TARANG

А.С. Теймуразов¹, Р.А. Степанов¹, М.К. Verma², S. Barman², A. Kumar², S. Sadhukhan²¹ *Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация*² *Department of Physics, Indian Institute of Technology, Kanpur, India*

Проблема учета влияния турбулентности течения встает при решении как фундаментальных вопросов гео- и астрофизики, так и прикладных задач, возникающих при разработке новых инженерных решений. Трудности применения стандартных положений теории появляются при рассмотрении течений с особой пространственной структурой, например, спиральных течений. Спиральность течения определяет топологию вихрей и сохраняется в процессе каскадного переноса энергии в турбулентном потоке. В данной работе предлагается подход к численному моделированию однородной изотропной спиральной турбулентности, нацеленный на обнаружение характерных признаков формирования инерционного интервала и нахождение распределений спектральных плотностей энергии и спиральности. В рамках подхода используется пакет программ TARANG, предназначенный для численного решения задач динамики жидкости в режиме развитого турбулентного течения и для исследования явлений гидродинамической неустойчивости различной физической природы (температурной конвекции, адвективного переноса пассивных и активных примесей, магнитной гидродинамики, влияния сил Кориолиса). TARANG – это программное обеспечение с открытым исходным кодом, написанное на объектно-ориентированном языке C++, обладающее высокими показателями эффективности распараллеливания вычислений на многопроцессорных компьютерах. Особое внимание в работе уделено применению входящего в пакет набора инструментов для анализа полученных решений. Проведены расчеты спектральных распределений и потоков энергии и спиральности при числах Рейнольдса 5700 и 14000 на сетках 512^3 и 1024^3 соответственно. Выполнена проверка реализуемости спектрального закона « $-5/3$ » и оценка универсальных констант Колмогорова и Бэтчелора в инерционном интервале масштабов. Анализ функции переноса энергии и спиральности между выделенными масштабами показывает существенный вклад нелокальных взаимодействий в каскадный процесс.

Ключевые слова: спиральная турбулентность, прямое численное моделирование, псевдоспектральный метод, пакет программ TARANG

DIRECT NUMERICAL SIMULATION OF HOMOGENEOUS ISOTROPIC HELICAL TURBULENCE WITH THE TARANG CODE

A.S. Teimurazov¹, R.A. Stepanov¹, M.K. Verma², S. Barman², A. Kumar² and S. Sadhukhan²¹ *Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation*² *Department of Physics, Indian Institute of Technology, Kanpur, India*

The problem of taking into account the influence of flow turbulence appears when solving both fundamental questions of geo- and astrophysics, and applied problems arising in the development of new engineering technologies. Difficulties in applying standard representations of the theory arise when considering special flows – flows with a complex spatial structure. One of such features – helicity of the flow – determines the topology of the vortices. Helicity is conserved in the process of cascade energy transfer in a turbulent flow. In this paper we consider the approach to numerical simulation of the helical homogeneous isotropic turbulence in order to identify characteristics of the inertial range formation and to define distributions of the spectral densities of energy and helicity. To solve this problem it is suggested to use the TARANG software package designed to solve problems of fluid dynamics in developed turbulent flow and to study hydrodynamic instability phenomena of different physical nature (thermal convection, advection of passive and active scalar transport, magnetic hydrodynamics, the influence of the Coriolis force). TARANG is an open source software written in object-oriented C++ language, which implements the technology of parallelizing computations for running on multiprocessor computers. The spectral distributions and fluxes for energy and helicity are calculated for Reynolds numbers 5700 and 14000 on grids 512^3 and 1024^3 , respectively. The validity of the spectral law “ $-5/3$ ” and the estimation of the universal constants of Kolmogorov and Batchelor in the inertial scale interval are verified. An analysis of the energy and helicity transfer functions between the separated scales (shell-to-shell transfer) reveals a significant contribution of nonlocal interactions to the cascade process.

Key words: helical turbulence, direct numerical simulation, pseudospectral method, TARANG code

1. Введение

Описание турбулентных течений сплошной среды остается одной из самых острых современных проблем механики газа, жидкости и плазмы. Решаемые задачи касаются как фундаментальных вопросов гео- и астрофизики, так и прикладных, возникающих при разработке новых технологий. Основные положения теории турбулентности были развиты в прошлом столетии, и к ним, в первую очередь, относится сформулированный Колмогоровым спектральный закон « $-5/3$ » [1]. Тогда же были проведены масштабные экспериментальные исследования турбулентных потоков жидкости и газа, протекающих вблизи различных поверхностей или в объемах [2]. Полученные феноменологические соотношения для средних полей, имеющие удовлетворительное согласование с экспериментом, позволяют и сейчас

решать многие инженерные задачи. Однако постоянное усложнение техники и необходимость в оптимизации параметров требуют более точных решений. Интенсивное развитие вычислительной техники в последние десятилетия вывело на передний план компьютерное моделирование в качестве основного инструмента исследования.

Массовое распространение приобрели пакеты прикладных программ, позволяющие учитывать турбулентный характер движения. Как правило, задача не решается во всех деталях, а используется некоторая модель турбулентности. В простых случаях данный подход работает очень хорошо. В зависимости от способа возбуждения турбулентности течение может характеризоваться спиральностью, которая определяет топологию вихрей и сохраняется в процессе каскадного переноса энергии в турбулентном потоке. Актуальные вопросы, связанные со спиральностью течений, привлекают внимание широкого круга исследователей, а экспериментальные и теоретические результаты публикуются в наиболее цитируемых мультидисциплинарных журналах [3, 4]. В задачах со сложной геометрией или при наличии нескольких активных полей (конвекции, магнитной гидродинамики, активной химии) для ответа на вопрос о применимости той или иной модели турбулентности в каждом конкретном случае требуется верификация расчетов. Необходимую информацию можно получить с помощью эксперимента (что, как правило, очень дорого или даже неосуществимо) или прибегнуть к полному (прямому) численному моделированию. В последнем случае успех исследования будет зависеть от вычислительной производительности метода и гибкости пакета в плане постановки задачи.

В настоящее время методы, применимые для прямого численного моделирования, постоянно развиваются. Большинство кодов основано на алгоритмах, использующих конечные элементы, конечные разности, конечные объемы или спектральное преобразование [5]. Сравнительному анализу методик с их применением посвящено множество работ, результаты которых здесь не обсуждаются.

Целью данной статьи является демонстрация возможностей прямого численного моделирования турбулентности с помощью пакета TARANG [6]. К преимуществам пакета относятся: высокие показатели эффективности распараллеливания; свободное распространение пакета; постоянное обновление активно работающей группой исследователей; прозрачное конфигурирование для быстрого освоения и применения. В работе описываются характерные особенности пакета TARANG и демонстрируется его использование на примере исследования спектральных распределений и потоков энергии и спиральности в однородной и изотропной турбулентности, возбуждаемой в кубической области с периодическими границами. Показаны реализуемость спектрального закона « $-5/3$ » и возможность определения универсальных констант Колмогорова и Бэтчелора в инерциальном интервале масштабов спиральной турбулентности.

2. Вычислительный код TARANG и псевдоспектральный метод

TARANG (в переводе с Санскрита означает «волны») – это пакет программ, предназначенный для решения задач динамики жидкости в режиме развитого турбулентного течения и для исследования явлений гидродинамической неустойчивости различной природы. Этот модульный код, написанный на объектно-ориентированном языке программирования C++, реализует технологию распараллеливания вычислений для запуска на многопроцессорных компьютерах. Он позволяет выполнять моделирование течений несжимаемой жидкости в различных постановках: движение жидкости под воздействием внешней силы, конвекцию Релея–Бенара, турбулентность с пассивными и активными примесями, магнитную гидродинамику, турбулентность во вращающихся системах и другое. TARANG является программным обеспечением с открытым исходным кодом и может быть загружен с интернет-сайта <http://turbulencehub.org>.

В данной работе показаны возможности кода TARANG для прямого моделирования гидродинамических течений, описываемых уравнениями Навье–Стокса для несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{u} — вектор скорости, P — давление (отнесенное к плотности), ν — кинематическая вязкость, \mathbf{F} — векторное поле плотности внешних сил, действующих на жидкость. Уравнения (1) и (2) решаются с использованием псевдоспектрального метода. Для этого они записываются в пространстве Фурье, в котором имеют вид:

$$(\partial_t + \nu k^2) \hat{u}_j = -ik_l \widehat{u_l u_j} - ik_j \hat{P} + \hat{F}_j, \quad (3)$$

$$k_j \hat{u}_j = 0; \quad (4)$$

здесь i — мнимая единица, k_j — компоненты волнового вектора. Символ « $\hat{}$ » обозначает Фурье-образ поля. Интегрирование по времени данных уравнений производится по схеме Рунге–Кутты с адаптивным шагом. Нелинейный член $\widehat{u_i u_j}$ в спектральном пространстве представляет собой свертку, при нахождении которой на расчетной сетке размером N^3 требуется выполнить $O(N^6)$ операций над числами с плавающей запятой. С целью экономии ресурсов компьютера при вычислении $\widehat{u_i u_j}$, для \hat{u}_j выполняется обратное преобразование Фурье, и произведение $u_i u_j$ определяется в физическом пространстве, после чего для этого произведения находится его Фурье-образ (см. Рис. 1).

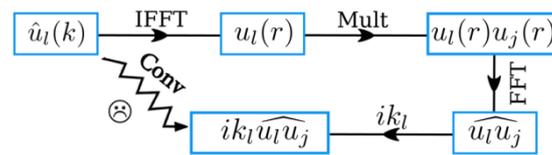


Рис. 1. Схематическая диаграмма вычисления нелинейного члена $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ в псевдоспектральном методе

При использовании быстрого преобразования Фурье (FFT) для расчета по описанной схеме нелинейного слагаемого потребуется лишь $O(N^3 \log(N^3))$ операций [7]. Поскольку для вычисления нелинейных членов необходимо выполнение умножения в физическом пространстве, этот метод называется псевдоспектральным. В результате многократного преобразования нелинейного слагаемого из пространства Фурье в физическое пространство и обратно возникает эффект спектрального наложения (aliasing), что приводит к накоплению ошибок, от которых можно избавиться, заполняя лишь 2/3 массива переменных в каждом направлении [7, 8].

TARANG обладает широким набором возможностей [6], из которых следует выделить способ задания внешней силы, позволяющий реализовать возбуждение спиральной турбулентности с контролируемыми характеристиками.

3. Параметризация внешней силы

Приток энергии и спиральности в систему обеспечивается действием задаваемой силы $\mathbf{F}(\mathbf{k})$ (в общем случае зависящей и от времени). Свойства силы будут влиять на характер реализуемого турбулентного течения. Конкретный выбор вида параметризации $\mathbf{F}(\mathbf{k})$ играет важную роль и во многом обуславливает возможности исследования. Обычно сила действует только в крупных масштабах системы с тем, чтобы в инерционном интервале поток оставался постоянным. Источником энергии может служить любая сила (в том числе случайная) вследствие свойства автокоррелированности [9]. Для притока спиральности сила должна быть такой, чтобы действительная часть выражения $\mathbf{F}(\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{F}^*(\mathbf{k}))$ имела постоянный знак. Фактический приток энергии и спиральности будет определяться полем скорости, а значит, будет плохо управляемым. Постоянство скорости изменения энергии и спиральности обеспечивается введением зависимости силы от скорости $\mathbf{u}(\mathbf{k})$. Характер этой зависимости может быть как детерминированным, так и случайным. В пакете TARANG реализованы оба варианта.

Далее приводится пример параметризации детерминированной силы, обеспечивающей заданную интенсивность притока энергии ε_E и спиральности ε_H в диапазон масштабов $k_0^F \leq |\mathbf{k}| \leq k_1^F$, который задается двумя значениями волновых чисел k_0^F и k_1^F . В заданный момент времени сила представляется в виде линейной комбинации скорости \mathbf{u} и завихренности $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{k}) = \alpha \mathbf{u}(\mathbf{k}) + \beta \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}), \quad (5)$$

где α и β — неопределенные размерные параметры. С учетом выражений энергии и спиральности для моды $\mathbf{u}(\mathbf{k})$:

$$E(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} |\mathbf{u}(\mathbf{k})|^2, \quad H(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{u}^*(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}) \}, \quad (6)$$

интенсивность притока энергии в моды, находящиеся в диапазоне масштабов действия силы, будет равна

$$\varepsilon_E = \sum_{k_0^F \leq |\mathbf{k}| \leq k_1^F} \Re \{ \mathbf{F}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{u}^*(\mathbf{k}) \} = \sum_{k_0^F \leq |\mathbf{k}| \leq k_1^F} \alpha |\mathbf{u}(\mathbf{k})|^2 + \beta \Re \{ \mathbf{u}^*(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}) \} = 2\alpha E_F + 2\beta H_F, \quad (7)$$

где E_F и H_F — полная энергия и спиральность течения в масштабах подкачки. Интенсивность притока спиральности вычисляется аналогичным образом:

$$\varepsilon_H = \frac{1}{2} \sum_{k_0^F \leq |\mathbf{k}| \leq k_1^F} \Re \{ \mathbf{F}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\omega}^*(\mathbf{k}) + \mathbf{u}(\mathbf{k}) \cdot (-i\mathbf{k} \times \mathbf{F}(\mathbf{k})) \} = 2\alpha H_F + 2\beta W_F, \quad (8)$$

где $W_F = \sum k^2 E(\mathbf{k})$ обозначает энстрофию в масштабах подкачки. Решая уравнения (7) и (8), можно найти коэффициенты α и β :

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{W_F \varepsilon_E - H_F \varepsilon_H}{E_F W_F - H_F^2}, \quad \beta = \frac{1}{2} \frac{E_F \varepsilon_H - H_F \varepsilon_E}{E_F W_F - H_F^2}. \quad (9)$$

Отметим, что в силу ограничения на величину спиральности $H(\mathbf{k}) \leq kE(\mathbf{k})$ числитель в (9) удовлетворяет условию $E_F W_F - H_F^2 \geq 0$ (на практике точное равенство никогда не выполняется). Выражения (9) могут быть получены и для переменных значений подкачки $\varepsilon_E(k)$ и $\varepsilon_H(k)$. И в таком случае можно провести моделирование турбулентности со спектрально распределенным источником спиральности [10].

4. Обработка численного решения (постпроцессинг)

Непосредственное численное интегрирование (3) является сложным и ресурсозатратным этапом решения задачи. Однако успех исследования турбулентных течений зависит от возможностей последующей обработки данных расчета. Определение надежных значений характеристик турбулентности требует длительного времени на осуществление численного моделирования (сотен реализаций) для достижения необходимой статистической надежности. Сохранение результатов в полном объеме невозможно, поэтому стратегия исследования и процедуры постпроцессинга должны быть выбраны заранее.

Общепринятым подходом при изучении турбулентных течений является построение спектра — распределения спектральной плотности. Обнаружение участка спектра, близко соответствующего закону « $-5/3$ », обычно считается доказательством существования инерционного интервала с турбулентным каскадом. Это далеко не всегда так. Возникновение того или иного спектрального распределения может быть обусловлено различными механизмами турбулентного переноса энергии и спиральности. Анализ спектральных потоков энергии и спиральности позволяет обосновать интерпретацию полученных спектров. Несмотря на очевидность данного утверждения, такой анализ выполняется довольно редко. Основная причина этого, по-видимому, состоит в дополнительной сложности расчета третьих моментов поля скорости, определяющих спектральные потоки. Пакет TARANG включает необходимый набор численных процедур постпроцессинга. Далее приводятся математические формулировки основных вычислительных алгоритмов.

Проблема нахождения спектральной плотности заключается в необходимости численного интегрирования по сфере в Фурье-пространстве функции, заданной на декартовой сетке. На практике пространство Фурье разбивается на сферические оболочки S_n с толщиной Δk :

$$S_n = \{ \mathbf{k}' \in \mathbb{R}^3 / n\Delta k < |\mathbf{k}'| \leq (n+1)\Delta k \}, \quad (10)$$

и далее спектральную плотность энергии в оболочке E_n считают приближено равной сумме энергий Фурье-мод в оболочке S_n , отнесенной к Δk . Однако такая процедура приводит к сильным биениям, особенно в длинноволновой части спектра [11]. Более точный результат получается, если суммировать энергии мод с их относительными весами

$$E_n = \frac{4\pi}{M_n} \sum_{\mathbf{k}' \in S_n} \hat{E}(\mathbf{k}') |\mathbf{k}'|^2, \quad (11)$$

где M_n — число мод, принадлежащих оболочке S_n . Волновое число, ассоциированное с S_n , следует вычислять как среднее:

$$k_n = \frac{1}{M_n} \sum_{\mathbf{k}' \in S_n} |\mathbf{k}'|. \quad (12)$$

Это относительно простое решение проблемы, предложенное в [11], пока было использовано лишь в единичных работах [12, 13], но оно позволило качественно улучшить определение спектральных характеристик.

Вычисление спектральных потоков выполняется с помощью выражений для функции спектрального переноса T из моды $\mathbf{u}(\mathbf{p})$ в моду $\mathbf{u}(\mathbf{k})$ с участием моды $\mathbf{u}(\mathbf{q})$, которые вместе образуют триаду $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$ [14]. Для переноса энергии имеем выражение:

$$T_E(\mathbf{k} | \mathbf{p} | \mathbf{q}) = \Re \{ \langle \mathbf{u}(\mathbf{q}), \boldsymbol{\omega}(\mathbf{p}), \mathbf{u}(\mathbf{k}) \rangle \}, \quad (13)$$

где $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{p}) = i\mathbf{p} \times \mathbf{u}(\mathbf{p})$ — завихренность для волнового вектора \mathbf{p} , скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают смешанное произведение векторов. Тогда полный спектральный поток $\Pi(k_0)$ в масштабе с волновым числом k_0 вычисляется как:

$$\Pi(k_0) = \sum_{k > k_0} \sum_{p \leq k_0} T(\mathbf{k} | \mathbf{p} | \mathbf{q}). \quad (14)$$

Это соответствует перебору по всем возможным триадам, что на практике неосуществимо даже для малых сеток. Способ преодолеть это ограничение состоит в том, что свертку Фурье-мод следует находить в физическом пространстве. Тогда функция переноса энергии из оболочки m в оболочку n вычисляется следующим образом:

$$Q_E(n, m) = \Re \left\{ \sum_{\mathbf{k} \in S_n} \left[\sum_{\mathbf{p} \in S_m} \mathbf{u}(\mathbf{q}) \times \boldsymbol{\omega}_m(\mathbf{p}) + \mathbf{u}(\mathbf{p}) \times \boldsymbol{\omega}_m(\mathbf{q}) \right] \cdot \mathbf{u}_n(\mathbf{k}) \right\} = \Re \left\{ \sum_{\mathbf{k} \in S_n} \mathbf{N}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{u}_n(\mathbf{k}) \right\} \quad (15)$$

где

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{k}) = \begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{k}), & \mathbf{k} \in S_n, \\ 0, & \mathbf{k} \notin S_n. \end{cases} \quad (16)$$

При этом $\mathbf{N}(\mathbf{k})$ рассчитывается в физическом пространстве, а сумма $\mathbf{N}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{u}_n(\mathbf{k})$ — в пространстве Фурье. Полный спектральный поток через оболочку n находится суммированием:

$$\Pi(n) = \sum_{l > n} \sum_{m \leq n} Q(l, m). \quad (17)$$

5. Результаты

Расчетная область представляла собой куб со стороной 2π с периодическими граничными условиями. Во всех расчетах подкачка энергии осуществлялась в диапазоне масштабов $2 \leq k \leq 4$, интенсивность притока энергии была фиксированной $\varepsilon_E = 0,1$, а ν выбиралось таким образом, чтобы добиться максимального значения числа Рейнольдса при заданном разрешении сетки. Вычисления проводились на сетках 512^3 и 1024^3 . Как показала практика, это наиболее компромиссные варианты в том плане, что такие расчеты вполне реально проводить на региональных суперкомпьютерах, и в тоже время, это достаточное разрешение, чтобы изучать особенности каскадных процессов. Для сетки 512^3 вязкость составляла $\nu = 10^{-3}$, что соответствовало числу Рейнольдса $Re = u_{rms} L / \nu = 5700$ и колмогоровскому масштабу $k_d = (\nu^3 / \varepsilon_E)^{-1/4} = 100$. Для сетки 1024^3 вязкость составляла $\nu = 4 \times 10^{-4}$, и достигались значения $Re = 14000$ и $k_d = 199$. Проводилось сравнение спектральных характеристик турбулентности без спиральности ($\varepsilon_H = 0$) и со спиральностью при $\varepsilon_H = 0,35$. Время осреднения во всех расчетах составляло не менее 25 единиц времени.

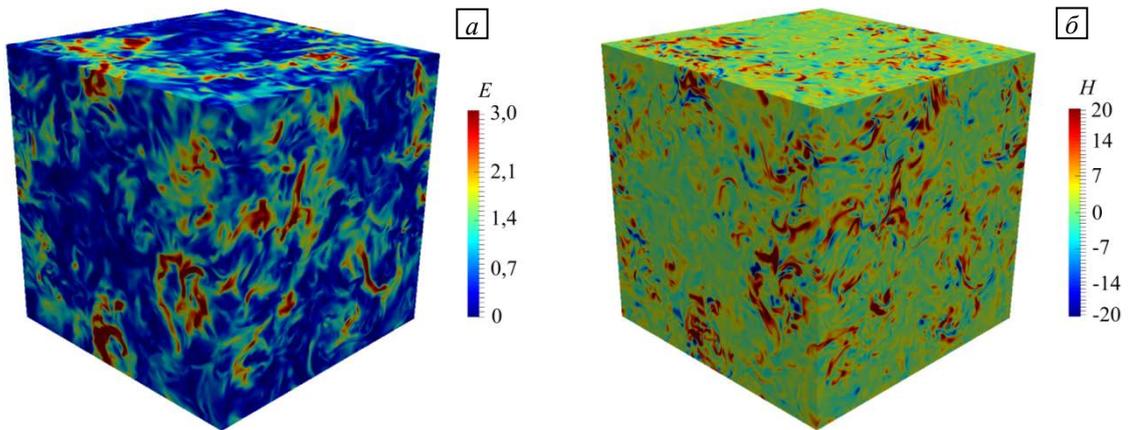


Рис. 2. Мгновенные поля, полученные в расчетах для сетки 512^3 : (а) – распределение энергии, (б) – распределение спиральности (цветная иллюстрация доступна в онлайн-версии)

Мгновенные пространственные распределения энергии и спиральности представлены на рисунке 2. Можно видеть, что крупномасштабные структуры присутствуют на распределении энергии, что вполне соответствует диапазону подкачки. На распределении спиральности структуры с положительными и отрицательными знаками перемежаются, но в среднем положительная спиральность преобладает.

5.1. Масштабируемость кода

Расчеты проводились на двух суперкомпьютерах: «Тритон» (ИМСС УрО РАН, г. Пермь) и «Shaheen II» (King Abdullah University of Science and Technology, Saudi Arabia). Суперкомпьютер «Тритон» пиковой производительностью 23,1 Тфлопс построен на базе процессоров Intel Xeon E5450 (поколение Harpertown, 256 процессорных ядер) и Intel Xeon E5-2690v4 (поколение Broadwell, 448 процессорных ядер) с интерконнектом InfiniBand FDR. Суперкомпьютер «Shaheen II» построен на базе процессоров Intel Xeon E5-2698v3 (поколение Haswell, 196608 процессорных ядер) с интерконнектом Aries и обладает пиковой производительностью 7,2 Пфлопс.

Рисунок 3 демонстрирует масштабируемость кода TARANG при расчетах на сетках 512^3 и 1024^3 . На сетке 512^3 на «Shaheen II» ускорение расчета на 16384-х процессорах по сравнению с расчетами на 32-х процессорах составляет 138 раз. При использовании процессоров Harpertown кластера «Тритон» наблюдается ускорение в 2,6 раза при переходе от 32-х процессоров к 128-ми, однако при задействовании 256-ти процессоров время выполнения одного шага расчета растет, что можно объяснить особенностями устройства сети обмена данными между сегментами данного кластера. Применение более производительных процессоров поколения Broadwell на кластере «Тритон» позволяет получать ускорение в 5,4 раза при переходе от 32-х процессоров к 256-ти. Те же закономерности прослеживаются и при расчетах на сетке 1024^3 . Следует отметить, что 25 единиц времени расчета на сетке 1024^3 соответствует $\approx 10^5$ шагам.

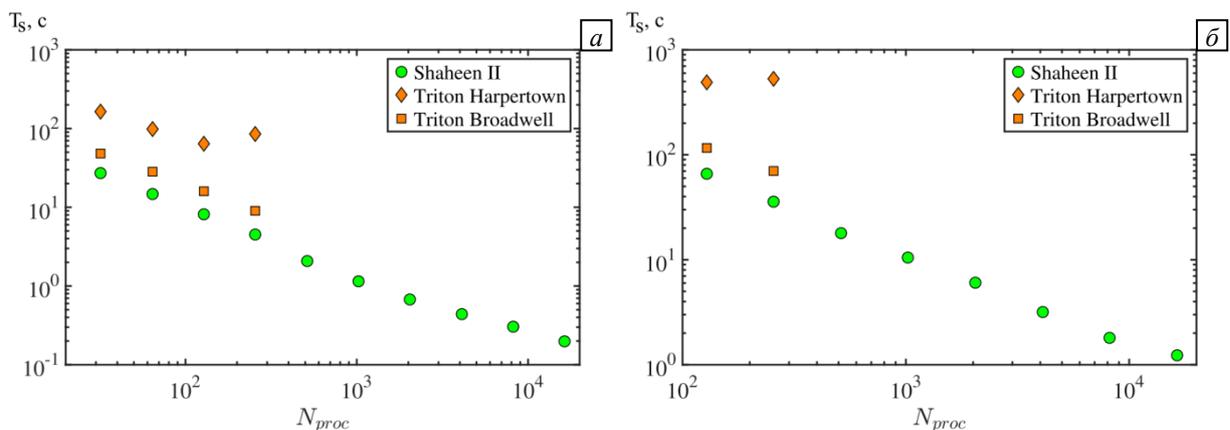


Рис. 3. Зависимость времени выполнения одного шага расчета T_s от количества используемых процессоров N_{proc} . (а) – сетка 512^3 , (б) – сетка 1024^3

5.2. Спектры энергии и спиральности

Представление спектров энергии, показанных на рисунке 4а, позволяет хорошо идентифицировать масштабы подкачки энергии, где спектр имеет максимум (выделено серым цветом) и масштабы диссипации, где спектр резко обрывается. Видно, что при более высоком разрешении (на сетке 1024^3) инерционный интервал становится шире, но определить диапазон масштабов, где закон « $-5/3$ » выполняется с достаточной точностью, невозможно. Это выполнимо только при рассмотрении компенсированных спектров, приведенных на рисунке 4б. На сетке 512^3 спектр начинает расти сразу после скачка на границе диапазона подкачки, в этом проявляется «эффект бутылочного горла» [15], в то время как на сетке 1024^3 присутствует горизонтальный участок вплоть до $k < 10$. Также на компенсированных спектрах становятся хорошо видимыми различия между спиральным и неспиральным случаями. В спиральной турбулентности уровень энергии в масштабах подкачки растет, а в инерционном диапазоне масштабов падает. Отметим, что спиральность не меняет распределения энергии в диссипативных масштабах.

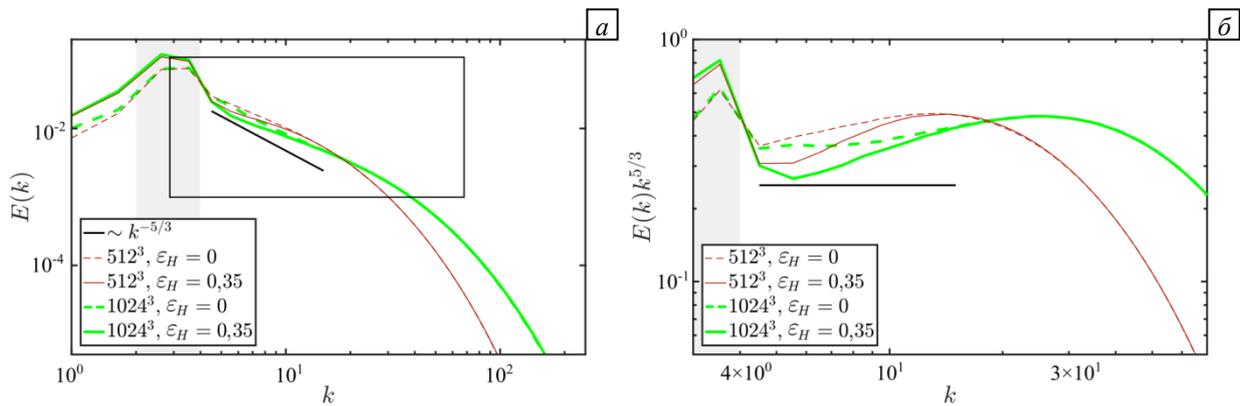


Рис. 4. Сравнение спектров энергии для спирального и неспирального течений, рассчитанных на сетках 512^3 и 1024^3 (а); компенсированный на $k^{5/3}$ спектр энергии (б) в увеличенном масштабе (см. зону, обозначенную на (а) прямоугольником); серым цветом показан диапазон подкачки энергии и спиральности

Классические представления о спиральной турбулентности говорят, что спиральность, вносимая в поток на крупном масштабе, должна передаваться по каскаду к мелким масштабам как пассивная примесь. Спектры спиральности, представленные на рисунке 5а, в целом соответствуют этому сценарию. В действительности более содержательным оказываются распределения относительной спиральности $H_r(k) = H(k)/(kE(k))$ (Рис. 5б). Теоретически предсказывается закон $H(k) \sim k^{-1}$, который использовался для компенсации. Получается, что выбранный режим подкачки спиральности является максимально возможным, так как $H_r(k)$ достигает своего максимума, равного 1. Отметим, что в масштабах $k < 10$ горизонтальный участок не наблюдается. Для объяснения полученных спектральных распределений энергии и спиральности необходимо рассмотреть их спектральные потоки, представленные в следующем разделе.

По спектрам энергии (Рис. 4) и спиральности (Рис. 5) можно получить оценки для константы Колмогорова K_E и константы Бэтчелора K_H :

$$E(k) = K_E \varepsilon_E^{2/3} k^{-5/3}, \quad (18)$$

$$H(k) = K_H \varepsilon_H \varepsilon_E^{-1/3} k^{-5/3}. \quad (19)$$

На сетке 512^3 получить такие оценки не представляется возможным ввиду отсутствия на спектрах протяженного интервала, отвечающего закону « $-5/3$ », поэтому оценки для искомых констант были сделаны только для сетки 1024^3 . В случае неспиральной турбулентности при осреднении на отрезке $4,5 \leq k \leq 10,5$ константа Колмогорова равна $K_E = 1,68 \pm 0,04$, что соответствует известным результатам [16]. Для спиральной турбулентности закон « $-5/3$ » не воспроизводится даже для сетки 1024^3 . Найденные для этого случая оценки $K_E = 1,4 \pm 0,1$ и $K_H = 1,1 \pm 0,1$ можно считать эффективными. Снижение K_E можно объяснить уменьшением доли спектрального потока энергии, обеспечиваемого локальными взаимодействиями. Для феноменологического описания этой ситуации представление (18) должно быть скорректировано, например, заменой ε_E на локальную долю Π_E .

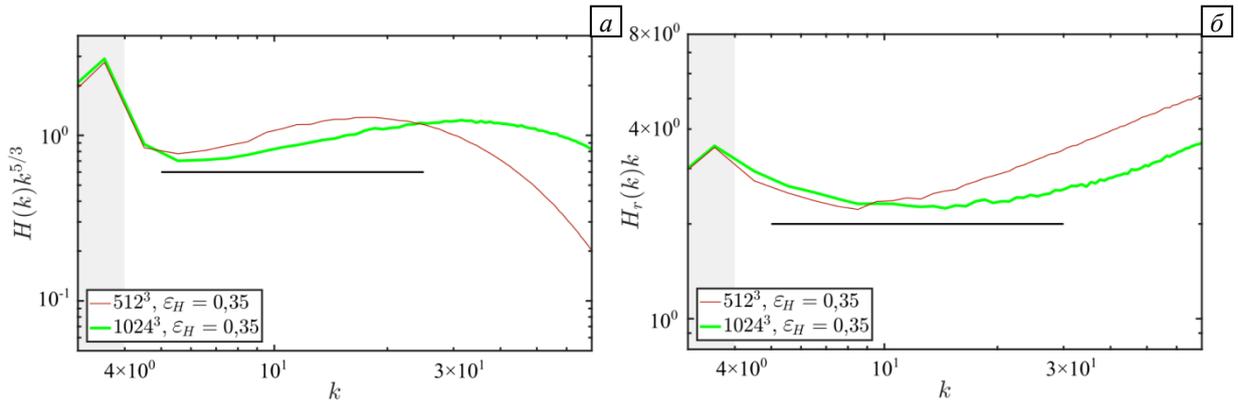


Рис. 5. Спектры спиральности, компенсированные на $k^{5/3}$ (а) и спектры относительной спиральности H_r , компенсированные на k (б); серым цветом показан диапазон подкачки энергии и спиральности

5.3. Спектральные потоки энергии и спиральности

Спектральные потоки энергии и спиральности, представленные на рисунке 6, позволяют оценить выполнение необходимого условия для реализации закона « $-5/3$ », а именно наличия диапазона масштабов с постоянным потоком. Существенная разница между потоками, полученными на разных сетках, является сильным аргументом в пользу проведения расчетов на сетке 1024^3 . Совпадение фактических значений потоков энергии и спиральности с заданными значениями ε_E и ε_H говорит о хорошей параметризации силы.

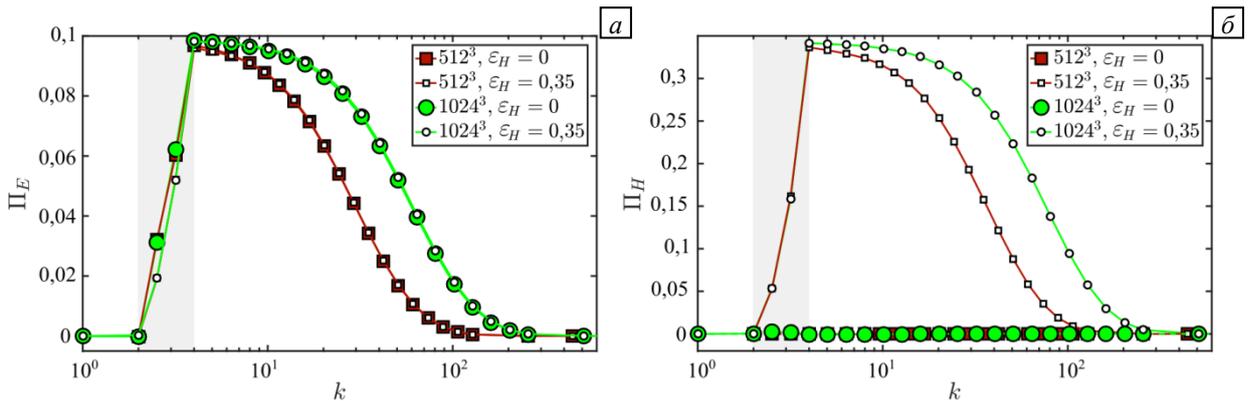


Рис. 6. Спектральные потоки для спирального и неспирального расчета на разных сетках: (а) – поток энергии, (б) – поток спиральности; серым цветом показан диапазон подкачки энергии и спиральности

Рассмотрим вопросы спектрального переноса более подробно с помощью функции спектрального переноса между двумя оболочками $Q(n, m)$ (shell-to-shell-перенос). В работе использовалось разбиение пространства Фурье на 25 оболочек следующим образом: $k_n = \{0, 1, 2^{n/3}, \dots, 512\}$. Представление $Q(n, m)$ для сетки 1024^3 , показанное на рисунке 7, позволяет провести детальный анализ каскадного процесса. Преобладание shell-to-shell-переноса энергии между соседними оболочками почти во всем диапазоне волновых чисел свидетельствует о реализации прямого каскада за счет локальных взаимодействий ($Q_E(n, n-1) > 0$ и $Q_E(n, n+1) < 0$), которые обеспечивают порядка 30% полного спектрального потока энергии. В случае спиральной турбулентности (Рис. 7б) наблюдается подавление локального переноса энергии в оболочках с номерами $5 < n < 9$, вклад которого падает до $\approx 10\%$, и спектральный поток реализуется через нелокальный перенос из оболочки с $n = 5$ и примерно до 12-й оболочки. Нелокальный shell-to-shell-перенос, который виден как горизонтальные и вертикальные полосы, еще более заметен для спиральности (Рис. 7в). Диагональ (локальный перенос) в Q_H отсутствует, начиная с масштаба форсинга ($n = 5$) до $n = 12$. Локальный перенос спиральности появляется с $n = 12$. В этой части спектра наблюдается распределение $H_r(k) \sim k^{-1}$ (см. Рис. 5б).

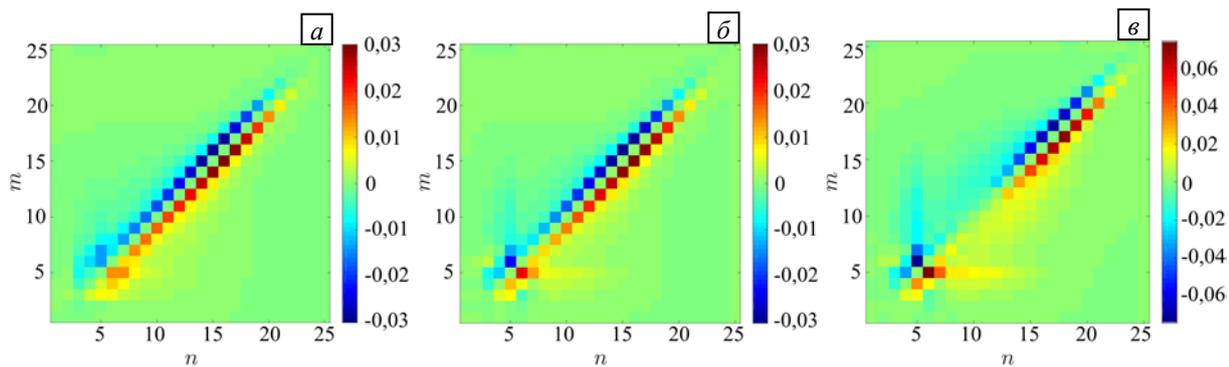


Рис. 7. Спектральный shell-to-shell-перенос энергии и спиральности для сетки 1024^3 . (а) – Q_E при $\varepsilon_H = 0$; (б) – Q_E при $\varepsilon_H = 0,35$; (в) – Q_H при $\varepsilon_H = 0,35$

6. Заключение

В работе рассмотрены особенности спектрального распределения и спектральных потоков энергии в однородной изотропной спиральной турбулентности. Задача решалась методами прямого численного моделирования с использованием пакета TARANG — программного обеспечения с открытым исходным кодом. Приведено описание возможностей пакета, в особенности в части постпроцессингового анализа. Подробно описаны вычислительные процедуры для нахождения функций спектральных плотностей и спектрального обмена энергией и спиральностью между различными масштабами. Показано, что предложенная модель внешней турбулентной силы, обеспечивающей подкачку энергии и спиральности, при практическом применении позволяет точно контролировать интенсивность подкачки и достичь максимально возможной степени спиральности. Установлено, что переход с сетки 512^3 на 1024^3 приводит к появлению участка инерционного интервала с законом « $-5/3$ ». Подробный анализ каскадного процесса спиральной турбулентности с применением спектрального shell-to-shell-переноса выявил существенное усиление нелокального обмена энергией и спиральностью между масштабами в инерционном интервале. Приведены оценки универсальных констант Колмогорова и Бэтчелора в инерциальном интервале масштабов для каждого из рассмотренных случаев.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 16-41-02012) и Министерства науки и технологий Республики Индия (грант INT/RUS/RSF/3). Для проведения расчетов использовались ресурсы суперкомпьютеров «Тритон» (ИМСС УрО РАН) и Shaheen II (Суперкомпьютерная лаборатория, KAUST, Саудовская Аравия) при поддержке проекта K1052.

Литература

1. Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Докл. АН СССР. – 1941. – Т. 30, № 4. – С. 299-303.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М: Мир, 1974. – 712 с.
3. Scheeler M.W., van Rees W.M., Kedia H., Kleckner, D., Irvine W.T.M. Complete measurement of helicity and its dynamics in vortex tubes // Science. – 2017. – Vol. 357, no. 6350. – P. 487-490. [DOI](#)
4. Moffatt, H.K. Helicity-invariant even in a viscous fluid // Science. – 2017. – Vol. 357, no. 6350. – P. 448-449. [DOI](#)
5. Ferziger, J.H., Peric. M. Computational Methods for Fluid Dynamics. – Berlin: Springer Verlag, 2002. – 423 p.
6. Verma M.K., Chatterjee A.G., Reddy S., Yadav R.K., Paul S., Chandra M., Samtaney R. Benchmarking and scaling studies of pseudospectral code Tarang for turbulence simulations // Pramana-J. Phys. – 2013. – Vol. 81, no. 4. – P. 617-629. [DOI](#)
7. Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zhang T.A. Spectral Methods in Fluid Turbulence – Berlin: Springer, 1988. – 557 p.
8. Boyd J.P. Chebyshev and Fourier Spectral Methods. – Second edition. – Dover, 2001. – 688 p.
9. Alvelius K. Random forcing of three-dimensional homogeneous turbulence // Phys. Fluids. – 1999. – Vol. 11, no. 7. – P. 1880-1889. [DOI](#)
10. Kessar M., Plunian F., Stepanov R., Balarac G. Non-Kolmogorov cascade of helicity-driven turbulence // Phys. Rev. E. – 2015. – Vol. 92. – P. 031004(R). [DOI](#)
11. Stepanov R., Plunian F., Kessar M., Balarac G. Systematic bias in the calculation of spectral density from a three-dimensional spatial grid // Phys. Rev. E. – 2014. – Vol. 90. – P. 053309. [DOI](#)
12. McKay M.E., Linkmann M., Clark D., Chalupa A.A., Berera A. Comparison of forcing functions in magnetohydrodynamics // Phys. Rev. Fluids. – 2017. – Vol. 2, no. 11. – P. 114604. [DOI](#)
13. Stepanov R., Teimurazov A., Titov V., Verma M.K., Barman S., Kumar A., Plunian F. Direct numerical simulation of helical magnetohydrodynamic turbulence with TARANG code // Proc. of Ivannikov ISPRAS Open Conf. – 2017. [DOI](#)
14. Verma M.K. Statistical theory of magnetohydrodynamic turbulence: recent results // Phys. Rep. – 2004. – Vol. 401, no. 5. – P. 229-380. [DOI](#)

15. Donzis D.R., Sreenivasan A.K. The bottleneck effect and the Kolmogorov constant in isotropic turbulence // *J. Fluid Mech.* – 2010. – Vol. 657. – P. 171-188. [DOI](#)
16. Yeung P.K., Zhou Y. Universality of the Kolmogorov constant in numerical simulations of turbulence // *Phys. Rev. E.* – 1997. – Vol. 56, no. 2. – P. 1746-1752. [DOI](#)

References

1. Kolmogorov A.N. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1941, vol. 30, no. 4, pp. 301-305.
2. Schlichting H. *Boundary-layer theory*. New York: McGraw-Hill, 1955. 535 p.
3. Scheeler M.W., van Rees W.M., Kedia H., Kleckner D., Irvine W.T.M. Complete measurement of helicity and its dynamics in vortex tubes. *Science*, 2017, vol. 357, no. 6350, pp. 487-490. [DOI](#)
4. Moffatt H.K. Helicity-invariant even in a viscous fluid, *Science*, 2017, vol. 357, no. 6350, pp. 448-449. [DOI](#)
5. Ferziger J.H., Peric M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Berlin: Springer Verlag, 2002. 423 p.
6. Verma M.K., Chatterjee A.G., Reddy S., Yadav R. K., Paul S., Chandra M., Samtaney R. Benchmarking and scaling studies of pseudospectral code Tarang for turbulence simulations, *Pramana-J. Phys.*, 2013, vol. 81, no. 4, pp. 617-629. [DOI](#)
7. Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zhang T.A. *Spectral Methods in Fluid Turbulence*. Berlin: Springer, 1988. 557 p.
8. Boyd J.P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Second edition, Dover, 2001. 688 p.
9. Alvelius K. Random forcing of three-dimensional homogeneous turbulence, *Phys. Fluids*, 1999, vol. 11, no. 7, pp. 1880-1889. [DOI](#)
10. Kessar M., Plunian F., Stepanov R., Balarac G. Non-Kolmogorov cascade of helicity-driven turbulence, *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 92, pp. 031004(R). [DOI](#)
11. Stepanov R., Plunian F., Kessar M., Balarac G. Systematic bias in the calculation of spectral density from a three-dimensional spatial grid, *Phys. Rev. E*, 2014, vol. 90, no. 5, pp. 053309. [DOI](#)
12. McKay M.E., Linkmann M., Clark D., Chalupa A.A., Berera A. Comparison of forcing functions in magnetohydrodynamics, *Phys. Rev. Fluids*, 2017, vol. 2, no. 11, pp. 114604. [DOI](#)
13. Stepanov R., Teimurazov A., Titov V., Verma M.K., Barman S., Kumar A., Plunian F. Direct numerical simulation of helical magnetohydrodynamic turbulence with TARANG code, *Proc. of Ivannikov ISPRAS Open Conf.*, 2017. [DOI](#)
14. Verma M. K. Statistical theory of magnetohydrodynamic turbulence: recent results, *Phys. Rep.*, 2004, vol. 401, no. 5, pp. 229-380. [DOI](#)
15. Donzis D.R., Sreenivasan A.K. The bottleneck effect and the Kolmogorov constant in isotropic turbulence, *J. Fluid Mech.*, 2010, vol. 657, pp. 171-188. [DOI](#)
16. Yeung P.K., Zhou Y. Universality of the Kolmogorov constant in numerical simulations of turbulence, *Phys. Rev. E.*, 1997, vol. 56, no. 2, pp. 1746-1752. [DOI](#)

Поступила в редакцию 01.12.17; опубликована в электронном виде 30.12.17

Сведения об авторах

Теймуразов Андрей Сергеевич, кфмн, нс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1; e-mail: tas@icmm.ru

Степанов Родион Александрович, дфмн, внс, ИМСС УрО РАН, 614013; e-mail: rodion@icmm.ru

Verma Mahendra Kumar, Prof., Department of Physics, Indian Institute of Technology (IITK), Kanpur, India; Kanpur (UP) 208016, India; e-mail: mkv@iitk.ac.in

Barman Satyajit, PhD student, Department of Physics, IITK, India; e-mail: sbarman@iitk.ac.in

Kumar Abhishek, PhD, Department of Physics, IITK, India; e-mail: abhkr@iitk.ac.in

Sadhukhan Shubhadeep, PhD student, Department of Physics, IITK, India; e-mail: shubhasports@gmail.com